Leçon 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de Rn. Exemples et applications.

Développements :

Surjectivité de l'exponentielle matricielle, Théorème de Hadamard Lévy.

Bibliographie :

Rouvière, Gourdon, OA, Bernis, Zavidovic,

Rapport du jury :

Cette leçon requiert une bonne maîtrise de la notion de différentielle première et de son lien avec les dérivées partielles. On doit pouvoir mettre en pratique le théorème de différentiation composée pour calculer des dérivées partielles de fonctions composées dans des situations simples (par exemple le laplacien en coordonnées polaires). La différentiation à l'ordre 2 est attendue, notamment pour les applications classiques quant à l'existence d'extrema locaux. On peut aussi faire figurer dans cette leçon la différentielle d'applications issues de l'algèbre linéaire (ou multilinéaire). Pour aller plus loin, l'exponentielle matricielle est une ouverture pertinente. D'autres thèmes issus de la leçon 214 trouvent aussi leur place ici.

Remarque 1. *Cadre : U, V sont des ouverts de E, F, des $\mathbb{R}$-ev de dimension finie.*

1 Généralités sur la différentiabilité

1.1 Applications différentiables

Définition 2 (Rouvière p45)**.** *Application différentiable.*

Proposition 3 (Rouvière p46)**.** *Unicité de la différentielle, notation.*

Exemple 4 (Rouvière p47)**.** *Différentielle d'une fonction réelle d'une variable réelle, d'une application constante, linéaire ou quadratique.*

Proposition 5. *Si f est différentiable pour tout $x \in U$, on dit qu'elle est différentiable sur U.*

Proposition 6 (Rouvière p50)**.** *Si f est différentiable en a alors elle est continue en a.*

Proposition 7 (Rouvière p50)**.** *La différentielle est linéaire.*

Proposition 8 (Rouvière p50)**.** *Différentielle de la composée. Différentielle du produit ? (OA p2)*

Définition 9 (Rouvière p54)**.** *Application C^1.*

Définition 10 (Rouvière p54)**.** *C^1 difféomorphisme.*

Proposition 11 (Rouvière p54)**.** *Si $f : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme, alors pour tout $x \in V$, $D_x(f^{-1}) = (D_{f^{-1}(x)}(f))^{-1}$.*

Exemple 12. *Différentielle de la trace, de l'exponentielle, de l'inversion.*
$D_M(Tr)(H) = Tr(H)$.
$D_0(exp)(H) = H$.

Exemple 13. *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ différentiable. Alors $\phi : t \mapsto ||g(t)||^2$ est dérivable de dérivée $\phi'(t) = 2 < g(t), f'(t) >$.*

1.2 Dérivées directionnelles, dérivées partielles, matrices jacobiennes

Définition 14 (OA p4)**.** *[Gourdon p304][Rouvière p49] Dérivée de f en a dans la direction v, notation.*

Proposition 15 (OA p4)**.** *[..] Si f est différentiable en a alors f admet une dérivée selon tout vecteur en a et égalité.*

Contre exemple 16 (OA p4)**.** *[Gourdon p309][Rouvière p49]*

Définition 17 (Gourdon p305)**.** *Dérivée partielle.*

Proposition 18 (Rouvière p49)**.** *Si f est différentiable, $df(a).h = \sum_{i=1}^n d_i f(a).h_i$.*

Exemple 19 (Gourdon p313)**.** *Différentielle du déterminant.*

Théorème 20 (Rouvière p54)**.** *f est C^1 si et seulement si toutes ses dérivées partielles existent et sont continues.*

Exemple 21 (Rouvière p54)**.** *$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.*

Contre exemple 22 (Gourdon p306)**.** *$f(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$, 0 sinon.*

Définition 23 (Rouvière p50)**.** *[Gourdon p307] Pour $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$, on peut voir $f(x)$ comme $(f_1(x_1, .., x_n), .., f_p(x_1, .., x_n))$. Si f est différentiable en x, alors les f_i sont différentiables enx, et on note $Jac_x(f)$ la matrice des différentielles partielles des f_i , que l'on appelle je jacobienne. C'est la matrice associée à $D_x(f)$ dans les bases canoniques de E et F. Expression du coefficient d'indice i et j de la jacobienne.*

Remarque 24 (Rouvière p51)**.** *[Gourdon p307] La matrice jacobienne de la composée est le produit des jacobiennes.*

Proposition 25 (Gourdon p51)**.** *La dérivation en chaîne.*

Exemple 26 (Gourdon p51)**.** *Le laplacien en polaires.*

Exemple 27 (Rouvière p55)**.** *Les dérivées de* $u : x \to f(x, -x)$ *et de* $g : (x, y) \mapsto f(y, x)$*.*

Proposition 28 (OA p5)**.** *Expression du gradient en fonction des dérivées partielles.*

Exemple 29. *Cauchy-Riemann.* f *est holomorphe sur* U *si* f *est différentiable sur* U *et pour tout* $a \in U$, $df(a) = \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$. ($df(a)$ *est donc une similitude. (A mettre ?)*

Proposition 30. *Une fonction* $f : \mathbb{C} \to F$ *est holomorphe si, et seulement si, elle est différentiable sur* $\mathbb{R}^2$ *et vérifie les conditions de Cauchy-Riemann.*

Proposition 31 (Rouvière)**.** *Théorème de Liapunov.*

1.3 Inégalités des accroissements finis

Théorème 32 (Gourdon p307)**.** *[Rouvière p104] Inégalité des accroissements finis.*

Remarque 33 (Gourdon p308)**.** *L'égalité des accroissements finis est valable si* f *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$*.*

Contre exemple 34 (Gourdon p72)**.** e^{it}*.*

Corollaire 35 (Rouvière p105)**.** *Si la différentielle est bornée, on est lipschitzien, et si elle est nulle, on est constant sur les composantes connexes. (Appliquer Cauchy-Lipschitz ou théorèmes de point fixe).*

Application 36. *Une fonction de classe* C^1 *est localement lipschitz.*

Application 37 (Rouvière p107)**.** $x = 1/2\sin(x + y)$ *et*$y = 1/2\cos(x - y)$*. La fonction sous-jacente est contractante donc unique point fixe.*

Application 38 (Rouvière p117)**.** *Différentielle d'une limite.*

Exemple 39 (Rouvière p118)**.** *Différentielle de l'exponentielle.*

Application 40. *Lyapunov ?*

1.4 Dérivées d'ordre supérieur et formules de Taylor

Définition 41 (Rouvière p293)**.** *Si la différentielle est différentiable en tout point de* u *alors* f *est deux fois différentiable en* a*, notation.*

Remarque 42. *Soit* $f : U \to F$ *application de classe* C^1*.*

Définition 43 (Cartan ?)**.** *Si l'application* $df : U \to L(E, F)$ *est différentiable en* a*, on dit que* f*est deux fois différentiable en* a*. On notera* $d^2f(a)$ *cette différentielle, et on l'identifiera à une application bilinéaire :* $d^2f(a)(h, k) = d^2f(a)(h)(k)$*. Si* d^2f *est continue, on dira que* f *est de classe* C^2 *sur* U*.*

Remarque 44. *On définit de même la différentielle* k*-ème, que l'on identifie à une application* k*-linéaire. On notera* $d^kf(a)(h)^k = df^k(a)(h, \Delta\Delta\Delta, h)$ *avec* $(h, \Delta\Delta\Delta, h) \in \mathbb{R}^k$*.*

Proposition 45 (Rouvière p294)**.** *Lemme de Schwartz.*

Contre exemple 46 (Rouvière p296)**.**

Définition 47 (Rouvière p294)**.** *Matrice hessienne.*

Définition 48 (Rouvière p296)**.** *Classe* C^k*, classe* C^∞*.*

Exemple 49. exp, $A \mapsto A^{-1}$ *sont de classe* C^∞*.*

Théorème 50 (Rouvière p297)**.** *Formule de Taylor-Young, Taylor reste intégral, Taylor Lagrange.*

Exemple 51 (Gourdon p311)**.** *Lemme d'Hadamard.*

Proposition 52 (Rouvière)**.** *Lemme de Morse.*

2 Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites

2.1 Théorème d'inversion locale

Remarque 53. *Sur* $\mathbb{R}$ *: une fonction de classe* C^1 *dont la dérivée ne s'annule pas est un* C^1 *-difféomorphisme*

Exemple 54. tan *et* sinh *sont des* C^1 *difféomorphismes.*

Théorème 55 (Rouvière p188)**.** *Théorème d'inversion locale. (Mettre* C^k *au lieu de* C^1*). Donner l'équivalence.*

Remarque 56. *Faire le dessin en annexe.*

Exemple 57 (Rouvière p204)**.** $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ *est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de* $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$*.*

Contre exemple 58 (Rouvière p204). $f(x) = x + x^2 \sin(\pi x)\chi_{\mathbb{R}^*}(x)$.

Théorème 59 (Rouvière p190). *Théorème d'inversion globale.*

Contre exemple 60. *Le premier exemple n'est pas un difféomorphisme global.*

Exemple 61. $\phi : (r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

Proposition 62. *Théorème de Hadamard Levy ?*

Proposition 63 (OA p11). *Racine k-ème d'une matrice.*

Proposition 64 (MT p59). $\exp : M_n(K) \to Gl_n(K)$ *est* C^1 *et* $D_0(\exp) = exp(0) = I_n$, *donc* $\exp$ *est un* C^1*-difféomorphisme d'un voisinage de* 0 *dans* $M_n(K)$ *vers un voisinage de* I_n *dans* $Gl_n(K)$.

Remarque 65. $\exp$ *est un difféomorphisme local mais pas global. Cela ne peut pas être un difféomrophisme global puisqu'on n'a pas l'injectivité.*

Proposition 66 (Zavidovich). $exp : M_n(\mathbb{C}) \to Gl_n(\mathbb{C})$ *est surjective. De plus,* $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{A^2, A \in Gl_n(\mathbb{R})\}$.

Proposition 67 (MT p59). *[OA p11]* $Gl_n(K)$ *n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits. (inclus dans des boules de taille arbitrairement petites)*

Proposition 68 (Rouvière p354). *Lemme de Morse. (Faut-il parler avant de la réduction des fq et la prop d'après ?)*

2.2 Théorème des fonctions implicites

Théorème 69 (Rouvière p192). *Théorème des fonctions implicite +dessin.*

Remarque 70 (Rouvière p196). *Version* C^k.

Exemple 71 (Rouvière p193). *Exemple du cercle. Les points où la pente est infinie posent problème, alors on préfère morceler le domaine en cartes et faire un reparamétrage sur chaque carte.*

Proposition 72 (Rouvière p194). *Différentielle de la fonction implicite.*

Exemple 73 (Rouvière p194). *Exemple pour le cercle.*

Exemple 74 (Rouvière). *Folium de Descartes.*

En tout point (a, b) *tel que* $3(b2 - a) \neq 0$, *le folium de Descartes d'équation* $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ *s'exprime localement comme le graphe d'une fonction. En particulier, la tangente en* (a, b) *a pour équation* $(a^2 - b)(x - a) + (b^2 - a)(y - b) = 0$.

Remarque 75 (OA). *La régularité de* g *est la même que celle de* f. *On peut ainsi avoir un DL de* g.

Remarque 76 (Rouvière p196). *Les théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites sont équivalents.*

Proposition 77 (Rouvière p242). *Résolution approchée d'une équation. Méthode et exemples.*

Proposition 78 (Rouvière p256-257). *Lien entre équations différentielles et fonctions implicites. Equation de Burgers avec méthode. ?*

Proposition 79 (OA p11). *La racine simple d'un polynôme dépend localement de façon* C^∞ *de ses coefficients. L'ensemble des polynômes scindés à racines simples de* $\mathbb{R}_n[X]$ *est ouvert. (cex racine double ?)*

Remarque 80. *Remarque sur le calcul de la différentielle de l'application définissant la surface implicite comme un graphe.*

3 Optimisation

3.1 Conditions du premier ordre

Proposition 81 (OA p16). *Condition nécessaire de minimalité locale.*

Définition 82 (OA p17). *Point critique.*

Contre exemple 83 (OA p17). x^3 *dont la dérivée et la dérivée seconde s'annulent en* 0 *mais qui n'a pas de minimum en* 0.

Contre exemple 84 (OA p17). *Faux si pas ouvert :* $x \in [0, 1] \mapsto t$.

Exemple 85. *Ex de détermination à la main d'un extremum (on teste tous les points critiques) Par exemple,* $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

Pour $f(x, y) = xy$, $(0, 0)$ *est un point critique mais n'est pas un extremum car* $f(x, x) = x^2 > 0$ *mais* $f(x, -x) < 0$.

Application 86 (OA p17). *Théorème de Rolle.*

Application 87 (OA p17). *Théorème de Darboux.*

Remarque 88. *Ces deux théorèmes permettent de chercher les points critiques.*

Proposition 89 (OA p30). *Réciproque vraie dans un cas particulier : Si la fonction* f *est convexe sur* I *et différentiable en un point* a *de l'intérieur tel que* $df(a) = 0$ *alors* f *admet un minimum global en* a.

Proposition 90. *Pour* $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, *on considère* $J : \mathbb{R}^n \to R, x \mapsto 1/2 < Ax, x > - < b, x >$. J *admet un unique minimum en* x_0 *qui est la solution de* $Ax = b$. *(A mettre où ? ?)*

3.2 Conditions du second ordre

Proposition 91 (OA p18)**.** *Conditions nécessaires du second ordre.*

Remarque 92. *Séparer conditions nécessaires et suffisantes du second ordre ? cf Pommellet p298.*

Contre exemple 93 (OA p18)**.** $x \mapsto x^3$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^3$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^4$.

Proposition 94 (Gourdon p317)**.** *[Pommellet p299] Notations de Monge et étude de $rt - s^2$ et r pour déterminer les extrema.*

Cas particulier de $n = 2$ Soit a un point critique de f.

1. Si $rt - s^2 > 0$ (i.e les deux vp de $grad(f(a))$ sont $\neq 0$ et de même signe

— Si $r + t > 0$ alors la matrice $grad(f(a))$ est définie positive et donc a est un minimum global

— Si $r + t < 0$ alors la matrice $grad(f(a))$ est définie négative et donc a est un maximum global

2. Si $rt - s^2 < 0$ (i.e les deux vp de $gradf(a)$ sont $\neq 0$ et de signe contraire. Alors a n'est un extremum local (si on note $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$ les vps associés aux vecteurs propres h_1 et h_2. Alors $< gradf(a)h_1, h_1 >= \lambda_1 ||h_1||^2 < 0$ et donc la matrice $gradf(a)$ n'est pas positive, a n'est pas un minimum local. Et en utilisant h_2, on montre que a ne peut pas être un maximum local.

3. Si $rt - s^2 = 0$, on ne sait pas conclure.

Exemple 95 (Gourdon p317)**.** $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

3.3 Conditions d'optimalité sous contraintes

Théorème 96 (Gourdon p317)**.** *Théorème des extrema liés.*

Contre exemple 97 (OA)**.** *Où les formes ne sont pas linéairement indépendantes.*

Application 98 (Gourdon)**.** *$SO_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.*

Application 99 (Gourdon p319)**.** *Inégalité arithmético-géométrique.*

Application 100 (OA p21)**.** *Diagonalisation des endomorphismes symétriques.*

Application 101 (Rouvière p410)**.** *Inégalité de Hadamard.*

Application 102 (Rouvière)**.** *Mise en boîte optimale.*

Application 103. *Minimisation de la fonction $f(x, y) = x^2 - y$ pour des vecteurs de norme 1.*